Pangkat, Akar dan Logaritma

Pada Pertemuan kali ini, kita akan mempelajari …………

- Pangkat
  - Kaidah pemangkatan bilangan
  - Kaidah perkalian bilangan berpangkat
  - Kaidah pembagian bilangan berpangkat
- Akar
  - Kaidah pengakaran bilangan
  - Kaidah penjumlahan bilangan terakar
  - Kaidah perkalian bilangan terakar
  - Kaidah pembagian bilangan terakar
- Logaritma
  - Basis Logaritma
  - Kaidah-kaidah Logaritma
  - Penyelesaian Persamaan dengan Logaritma

Pangkat

- Pangkat dari sebuah bilangan ialah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara berurutan.
- Notasi x^a : bahwa x harus dikalikan dengan x itu sendiri secara berturut-turut sebanyak a kali.

Kaidah Pemangkatan Bilangan

1. $x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$

2. $x^1 = x$

3. $0^x = 0$

4. $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$

5. $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{X^a}$

6. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

7. $\left(x^a\right)^b = x^{ab}$

8. $x^{a^b} = x^c$ dimana $c = a^b$

Kaidah perkalian bilangan berpangkat

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$\text{contoh}: 3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$$

$$x^a \cdot y^a = (xy)^a$$

$$\text{contoh}: 3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$$

Kaidah pembagian bilangan berpangkat

$$x^a : x^b = x^{a-b}$$

$$\text{contoh} : 3^2 : 3^4 = 3^{2-4} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$x^a \cdot y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

$$\text{contoh} : 3^2 : 5^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Akar

- Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat.
- Akar dari sebuah bilangan ialah basis (x) yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya (a).
- Bentuk umum :

$$\sqrt[a]{m} = x \quad \text{jika} \quad x^a = m$$

m = radikan

Kaidah pengakaran bilangan

1. $\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}$

2. $\sqrt[b]{x^{a}} = x^{\frac{a}{b}}$

3. $\sqrt[b]{xy} = \sqrt[b]{x} \cdot \sqrt{y}$

4. $\sqrt[b]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}$

Kaidah penjumlahan (pengurangan) bilangan terakar

- Bilangan-bilangan terakar hanya dapat ditambahkan atau dikurangkan apabila akar-akarnya sejenis.

$$m\sqrt[b]{x^a} \pm n\sqrt[b]{x^a} = (m \pm n)\sqrt[b]{x^a}$$

Kaidah perkalian bilangan terakar

Hasil kali bilangan - bilangan terakar adalah akar dari hasil kali bilangan - bilangannya. Perkalian hanya dapat dilakukan apabila akar - akarnya berpangkat sama.

$$\sqrt[b]{x} \cdot \sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{xy}$$

Akar ganda dari sebuah bilangan adalah akar pangkat baru dari bilangan bersangkutan; pangkat - baru akarnya ialah hasil kali pangkat dari akar - akar sebelumnya.

$$\sqrt[b]{\sqrt[c]{x^a}} = \sqrt[bc]{x^a}$$

Kaidah pembagian bilangan terakar

- Hasil bagi bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasil bagi bilangan-bilangannya. Pembagian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}}$$

Logaritma

Logaritma pada hakekatnya merupakan kebalikan dari proses pemangkatan dan/atau pengakaran.

Bentuk pangkat	Bentuk akar	Bentuk Logaritma
$x^a = m$	$\sqrt[a]{m} = x$	${}^{x}\log m = a$

Suku-suku pada ruas kanan menunjukkan bilangan yang dicari atau hendak dihitung pada masing-masing bentuk

Basis Logaritma

- Logaritma dapat dihitung untuk basis berapapun.
- Biasanya berupa bilangan positif dan tidak sama dengan satu.
- Basis logaritma yang paling lazim dipakai adalah 10 (common logarithm)/(logaritma briggs)
- $\log_m$ *berarti* $^{10}\log_m$, $\log_{24}$ *berarti* $^{10}\log_{24}$
- Logaritma berbasis bilangan e (2,72) disebut bilangan logaritma alam (natural logarithm) atau logaritma Napier
- $\ln_m$ berarti $^{e}\log_m$

Kaidah-kaidah Logaritma

1. ${}^{x}\log x = 1$
2. ${}^{x}\log 1 = 0$
3. ${}^{x}\log x^{a} = a$
4. ${}^{x}\log m^{a} = a\,{}^{x}\log m$
5. $x^{\,{}^{x}\log m} = m$
6. ${}^{x}\log mn = {}^{x}\log m + {}^{x}\log n$
7. ${}^{x}\log \dfrac{m}{n} = {}^{x}\log m - {}^{x}\log n$
8. ${}^{x}\log m \cdot {}^{m}\log x = 1$
9. ${}^{x}\log m \cdot {}^{m}\log n \cdot {}^{n}\log x = 1$

Penyelesaian Persamaan dengan Logaritma

- Logaritma dapat digunakan untuk mencari bilangan yang belum diketahui (bilangan anu) dalam sebuah persamaan, khususnya persamaan eksponensial dan persamaan logaritmik.
- Persamaan logaritmik ialah persamaan yang bilangan anunya berupa bilangan logaritma, sebagai contoh :
  $\log (3x + 298) = 3$

Latihan

- Dengan melogaritmakan kedua ruas, hitunglah x untuk $3^{x+1} = 27$
- Selesaikan x untuk $\log(3x + 298) = 3$